www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES **Durée : 4 heures**

"Aucune calculatrice n'est autorisée pendant la durée de cette épreuve"

Les deux problèmes sont indépendants et doivent obligatoirement être traités.

Notations : on désigne par : R l'ensemble des nombres réels
N l'ensemble des entiers naturels
N* l'ensemble des entiers naturels non nuls

PROBLEME I

I. On désigne par $R[X]$ l'ensemble des polynômes sur R et par $R_n[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ($n \in N^*$).

Soit φ l'application qui à tout élément P de $R_n[X]$ fait correspondre l'élément $\varphi(P)$ de $R[X]$ défini par :

$\varphi(P) = X(1 - X)P' + n X P$ où P ' désigne le polynôme dérivé de P

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $R_n[X]$.

2) Montrer que les vecteurs propres de φ sont des polynômes de degré n.

3) Considérant un polynôme propre, on suppose qu'il admet une racine a, réelle ou complexe, différente de 0 et 1. En étudiant la multiplicité de cette racine, montrer que l'on est conduit à une absurdité et qu'en conséquence, tout polynôme propre possède n racines réelles appartenant à l'ensemble { 0, 1 }.

En déduire l'expression des vecteurs propres puis des valeurs propres de φ.

II. 1. A tout élément Q de $R[X]$ et à tout naturel n de N* on associe le polynôme noté $B_n(X ; Q)$ défini par : $B_n(X;Q) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k Q\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}$ avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Expliciter $B_n(X ; 1)$, $B_n(X ; X)$ et $B_n(X ; X^2)$.

2. Soit I l'intervalle fermé [0, 1]. A la fonction x^m ($m \in N$) et à l'entier naturel n de N*, on associe la fonction polynomiale notée $B_n(x ; x^m)$ définie pour tout x de I par :

$$B_n(x ; x^m) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^m x^k (1 - x)^{n-k}$$

Etudier la convergence uniforme sur I de $B_n(x ; x^m)$ vers x^m dans les cas particuliers m = 0, 1 et 2.

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME II

I. On considère l'équation différentielle linéaire (E) du second ordre :

$$(E) \quad A(x)\, y'' + B(x)\, y' + c\, y = 0$$

où c est un réel donné, A et B des fonctions réelles données de la variable réelle x, définies et continues sur un même intervalle J de R où A ne s'annule pas.

On admettra que l'ensemble des solutions de (E) sur J constitue un espace vectoriel de dimension 2.

On désigne par f une fonction admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre 2, à dérivée première strictement positive (ou négative).

On effectue dans (E) le changement de variable $t = f(x)$.

1) Etablir la condition nécessaire et suffisante pour que ce changement de variable transforme (E) en une équation différentielle équivalente à coefficients constants.

2) On considère l'équation différentielle (E') :

$$(E') \quad (1 - x^2)\, y'' - x\, y' + 9\, y = 0$$

2.1.) Sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, +1[$ et $]+1, +\infty[$ déterminer les changements de variables transformant (E') en une équation différentielle équivalente à coefficients constants. En déduire, sur chacun de ces intervalles, l'ensemble des solutions de (E').

2.2.) Existe-t-il des solutions de (E') développables en série entière ?

3) Indépendamment de toutes les questions précédentes, montrer que (E') admet sur $]-1, +1[$ deux solutions particulières u et v telles que : $u^2 + v^2 = 1$

En déduire, sur cet intervalle, la solution générale de (E').

Quelle technique de calcul pourrait-on alors utiliser pour déterminer les solutions de (E') sur ses autres intervalles de définition (on ne calculera pas dans cette question ces solutions) ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail